Les grands domaines des mathématiques

La classification de Bossut, 1784

« Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs ; par exemple les distances, les surfaces, les vitesses, etc.

Elles se divisent en mathématiques pures et en mathématiques mixtes.

• **Les mathématiques pures** considèrent la grandeur d'une manière simple, générale et abstraite … Elles comprennent :
1°) L'arithmétique ou l'art de compter
2°) La géométrie qui apprend à mesurer l'étendue
3°) L'analyse, science des grandeurs en général
4°) La géométrie mixte, combinaison de la géométrie ordinaire et de l'analyse

• **Les mathématiques mixtes** empruntent de la physique …
1°) La méchanique, science de l'équilibre et du mouvement des corps solides
2°) L'hydrodynamique qui considère l'équilibre et le mouvement des corps liquides
3°) L'acoustique ou la théorie des sons
4°) L'optique ou la théorie des mouvements de la lumière
5°) L'astronomie, science du mouvement des corps célestes. »

La nature des mathématiques

Pour saisir l'essence des mathématiques, voir quel est son objet, nous allons parcourir 5 grands domaines qui la constituent : arithmétique, géométrie, algèbre, analyse, statistiques et probabilités, en essayant de voir comment on peut définir chaque domaine, quelles sont ses origines, à quelles questions il tente de répondre, et quels types de réponses il apporte à ces questions.
Ce qui en ressort c'est que ces questions sont :

- enracinées dans la vie sociale (commerce, propriété, navigation, calendrier, astronomie, géographie, mécanique, religion …)
- transversales à plusieurs domaines.

D'où :

- des méthodes et des outils transférables aux différents domaines,
- la fabrication d'outils et de méthodes généraux.

C'est ainsi que ce sont constitués des domaines aux objets et méthodes très généraux : Arithmétique, Algèbre et Analyse (Nombre, équations, fonctions).

Arithmétique

Définitions

- *Encyclopédie Méthodique*, Bossut, 1734

« C'est l'art de dénombrer, ou cette partie des Mathématiques qui considère les propriétés des nombres. On y apprend à calculer exactement, facilement, promptement. L'*arithmétique* est la base de toutes les Sciences mathématiques, car les rapports de toutes les espèces de quantités se réduisent finalement en nombres.
Quelques auteurs définissent l'*Arithmétique* la Science de la quantité discrète. »

- Bézout, 1739

« On appelle en général, quantité, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc. sont des quantités. Tout ce qui est quantité est de l'objet des Mathématiques ; mais l'Arithmétique qui fait partie de ces Sciences, ne considère les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres. L'Arithmétique est donc la science des nombres : elle en considère la nature et les propriétés ; et son but est de donner des moyens faciles, tant pour représenter les nombres, que pour les composer et décomposer, ce qu'on appelle calculer. »

Ses origines

- Besoins sociaux : échanges, partages, commerce, évaluation des biens, impôts, héritages, salaires, calendrier…
- Besoins toujours actuels

Les grandes questions

- Comment dénombrer ? (un troupeau, une récolte…)
- Comment calculer ? (un prix, une durée, un nombre d'ouvriers…)
- Comment comparer ? (des masses, des prix, … : problèmes de conversions, de comparaison absolue et relative …)
- Comment partager ? (des richesses, des biens, des ressources, des productions…)

Les réponses…

– Les réponses à ces questions ont amené à élaborer des notions et des techniques et à les améliorer : bases de numération, techniques de calcul, format des nombres, système métrique…
– Les questions sont toujours actuelles : l'arithmétique est toujours très présente dans notre vie sociale.

Géométrie

Définitions

- Mesurer

« L'objet principal de la géométrie est de mesurer les différentes espèces d'étendues que l'esprit considère. » Montucla. *Histoire des Mathématiques*, 1758

- Construire

« Dès qu'on a fait de la géométrie, comme on tendait vers des buts concrets, on a effectué des constructions … » Lebesgue. *La mesure des grandeurs*, 1935

Origine

« Mais l'étude des aires et des volumes a une utilité plus haute qu'il faut envisager : elle fait comprendre comment, pour des fins pratiques, les hommes ont pu être conduits à construire la géométrie et elle justifie leur effort. » Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, 1935

– Arpentage : bornage, partage des terrains, travaux publics (routes, canaux, déblais, remblais…)

– Construction d'édifices, de décors…

– Besoins de l'astronomie, cartographie, géographie, navigation, fortification…

Les grandes questions

- Comment mesurer une grandeur ? (longueur, aire, volume, angle)
- Comment mesurer des grandeurs inaccessibles ? (distances…)
- Comment construire ? (une figure, un solide… ayant des caractéristiques données, avec des instruments donnés)
- Comment se repérer ? (à la surface de la Terre, sur mer, par rapport au Ciel)
- Comment représenter l'espace sur un plan ? (perspective, peinture, écran)

Les réponses…

– Les réponses à ces questions ont amené à élaborer tout un corpus de notions, techniques et instruments : angle, parallèles, tangente, symétries, cercles, triangles, polygones, polyèdres, corps ronds, constructions, lieux, triangles isométriques, figures semblables…, compas, astrolabe …

– Questions toujours actuelles, et qui se renouvellent : GPS, images numériques…

- *Clairaut : Elemens de Géométrie, 1741*

PREMIÈRE PARTIE (pages 1 à 72)
Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

DEUXIÈME PARTIE (pages 73 à 102)
De la méthode géométrique de comparer des figures rectilignes.

TROISIÈME PARTIE (pages 103 à 144)
De la mesure des figures circulaires et de leurs propriétés.

QUATRIÈME PARTIE (pages 145 à 215)
De la manière de mesurer les solides et leurs surfaces.

Algèbre

Définition

« Science du calcul des grandeurs considérées généralement. On a choisi pour représenter les grandeurs ou les quantités les lettres de l'alphabet comme étant d'un usage plus facile et plus commode qu'aucun autre signe.
L'algèbre a deux parties :

- La méthode de calculer les grandeurs, en les représentant par les lettres de l'alphabet,
- La manière de se servir de ce calcul pour la solution des problèmes (partie la plus étendue et la principale). »

Encyclopédie Méthodique, D'Alembert, 1734

Origines

- ***Algèbre numérique*** : résolution de problèmes par mise en équation, puis résolution des équations.
- ***Algèbre littérale*** : outil pour résoudre tous les problèmes.

Nullum non problema solvere :
« L'Art analytique s'attribue justement le magnifique problème des problèmes qui est : résoudre tout problème. » Viète. *Introduction à l'Art analytique,* 1591

Les grandes questions

- Comment résoudre un problème à l'aide d'équations ?
- Comment exprimer des relations entre grandeurs ? (formules générales, équations de courbes, équations différentielles…)
- Comment calculer sur les grandeurs ?

Les réponses

Les réponses à ces questions ont fait de l'algèbre le langage universel de la science.
Elle a remplacé en ce sens la Géométrie.

- Clairaut. *Elemens d'Algèbre*, 1768, 4° éd.

  − « Je me suis proposé de suivre dans cet ouvrage la même méthode que dans mes *Elemens de Géométrie.* J'ai tâché d'y donner les règles de l'Algèbre dans un ordre que les Inventeurs eussent pu suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous forme de théorème. Toutes, au contraire, semblent être découvertes en s'exerçant sur les problèmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre. »

  − « Parmi les différents Problèmes dont les premiers Mathématiciens qui ont noms d'Algébristes se sont occupés, je choisis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils sont parvenus à former la Science qu'on nomme Algèbre ou Analyse ; » <Partager une somme, par exemple 890 à trois personnes, en sorte que la première…>

Analyse

Définition

« ANALYSE est proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques, en les réduisant à des équations.
L'*analyse*, pour résoudre tous les problèmes, emploie le secours de l'Algèbre, ou le calcul des grandeurs en général : aussi ces deux mots, *analyse*, *algèbre*, sont souvent regardés comme synonymes. /…/
L'*analyse* est divisée, par rapport à son objet, en *analyse des quantités finies*, et *analyse des quantités infinies*.
Analyse des quantités finies, est ce que nous appelons autrement *Arithmétique Spécieuse* ou *Algèbre*.
Analyse des quantités infinies ou *des infinis*, appelée aussi *la nouvelle Analyse* … »
Encyclopédie Méthodique, D'Alembert, 1734

Origine

– Méthodes infinitésimales pour le calcul des longueurs de courbes, aires, volumes, centres de gravité.
– Étude des mouvements et trajectoires (astronomie, mécanique, optique, physique…)
– Recherche de lois inconnues (problèmes de mécanique et de physique)

Les grandes questions

- Comment étudier les variations d'une grandeur ?
- Comment comparer des grandeurs variables ?
- Comment construire une courbe (trajectoire…) ?
- Comment résoudre un problème d'optimisation ?
- Comment trouver une courbe astreinte à des conditions (trajectoire, … : calcul différentiel) ?
- Comment mesurer des grandeurs liées à des courbes ? (longueur, aire, volume, … : calcul intégral).

Les réponses

Les réponses à ces questions ont amené à élaborer tout un corpus de notions, méthodes, techniques : équations, graphiques, fonctions, dérivées, intégrales …

Statistiques et probabilités

Définitions

− « La Géométrie du hasard » Pascal, 1654

− « Qu'y a-t-il de commun entre la statistique, ensemble de routines administratives nécessaires pour décrire un état et sa population, et le *calcul des probabilités*, subtile façon d'orienter les choix en cas d'incertitude, imaginée vers 1660 par Huygens et Pascal, et les estimations de constantes physiques et astronomiques à partir d'observations empiriques disparates, effectuées vers 1750 ? »

A. Desrosières. *La politique des grands nombres. Histoire de la raison statistique*, 1993, réédition 2000

Origine

Statistiques :

- Statistique allemande : recueil et organisation de données pour gouverner, gérer l'État
- Arithmétique sociale anglaise : extrapoler à partir de données (population) pour rentes, assurances, …

Probabilités :

- Jeux de hasard : jeu équitable, partage équitable
- Contrôle des estimations
- Aide à la décision juste (Condorcet, Laplace, Poisson)
- Théorie des erreurs

Les grandes questions

- Comment mesurer l'incertain ?
- Comment recueillir et transmettre de l'information ?
- Comment situer un individu dans une population ? (« L'homme moyen »)
- Comment estimer une population à partir d'un échantillon ?
- Comment prévoir ?

Les réponses

− Les réponses à ces questions ont amené à l'utilisation de tableaux et de graphiques, aux notions de moyenne, médiane, fréquence, espérance, probabilité, et à leurs calculs.

− « Le chômage, l'inflation, la croissance, la pauvreté, la fécondité ; ces objets et leurs mesures statistiques constituent des points d'appui pour décrire des situations économiques, dénoncer des injustices sociales, justifier des actions politiques. Ils fournissent une langue stable et largement acceptée pour exprimer le débat. » A. Desrosières. 1993, 2000.

− « Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie qui ne sont, en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilités. » Laplace. 1812